Temat: Co to jest układ równań?

Przykład 1

Podaj trzy pary liczb x, y spełniające równanie $2x + 4y = 20$.

Przykładowe pary:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 4{,}75 \end{cases}$

Po wybraniu jako x dowolnej liczby wyznaczamy y, rozwiązując odpowiednie równanie.

Równanie $2x + 4y = 20$ to przykład **równania z dwiema niewiadomymi**. Równanie to jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb.

Przykład 2

Do skarbonki wrzucono 7 monet. Były to monety dwu- i pięciozłotowe. Ile monet dwu-, a ile pięciozłotowych wrzucono, jeśli w skarbonce znajduje się 26 zł?

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych: x – liczba monet dwuzłotowych, y – liczba monet pięciozłotowych.

Aby opisać sytuację z zadania, potrzebujemy dwóch równań: $x + y = 7$ (do skarbonki wrzucono 7 monet) i $2x + 5y = 26$ (w skarbonce znajduje się 26 zł). Równania te muszą być spełnione jednocześnie – zapisujemy to, łącząc je klamrą:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$$

Ustalmy najpierw, które pary liczb spełniają pierwsze równanie. Liczby monet x i y mogą być tylko liczbami dodatnimi naturalnymi, zatem równanie $x + y = 7$ spełnia sześć par liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

Spośród nich tylko para $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ spełnia drugie równanie $2x + 5y = 26$.

Zatem jest ona rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$, czyli do skarbonki wrzucono 3 monety dwuzłotowe i 4 monety pięciozłotowe.

Układem dwóch równań z dwiema niewiadomymi (lub krótko: układem równań) nazywamy dwa równania jednocześnie rozpatrywane, opisujące związek między tymi dwiema niewiadomymi. **Rozwiązanie układu równań** to para liczb, która spełnia jednocześnie oba równania.

Przykład 3

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ -x + 2y = 14 \end{cases}$

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$

A. Podstawiamy do równań układu $x = 1$ i $y = 2$.

$\begin{cases} 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10 \\ -1 + 2 \cdot 2 = 3 \neq 14 \end{cases}$

Spełnione pierwsze równanie.
Drugie równanie nie jest spełnione.

Zatem para $x = 1$, $y = 2$ nie spełnia podanego układu równań.

B. Podstawiamy do równań układu $x = -2$ i $y = 6$.

$\begin{cases} 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 = -8 + 18 = 10 \\ -(-2) + 2 \cdot 6 = 2 + 12 = 14 \end{cases}$

Spełnione pierwsze równanie.
Spełnione drugie równanie.

Zatem para $x = -2$, $y = 6$ spełnia podany układ równań.

Zadania

1. Sprawdź, czy para liczb $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ spełnia podany układ równań.

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ 7x - y = 17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + \frac{1}{3}y = 3 \\ -x - y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 2\frac{1}{6} \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y+1}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = 7 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2 \\ \frac{5}{2}y - \frac{3}{4}x = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = 0 \\ \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = -\frac{5}{6} \end{cases}$

2. Sprawdź, która z podanych par liczb spełnia układ równań.

$$\begin{cases} 3x + 2y = -8 \\ -6x - 5y = 11 \end{cases}$$

A. $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = -8 \\ y = 8 \end{cases}$

3. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych dodatnich spełniające równanie.

a) $3x + 2y = 17$ b) $3x + 4y = 17$ c) $2x + 4y = 17$

4. Do danego równania dopisz takie drugie, aby utworzony układ równań był spełniony przez podaną parę liczb.

a) $4x + 3y = 14$, $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$ c) $4x - 9y = -1$, $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

b) $3x - 7y = 6$, $\begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$ d) $12x + \frac{1}{2}y = -10$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -8 \end{cases}$

5. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Liczba x jest o 8 większa od liczby y. Liczba y jest pięciokrotnie mniejsza od liczby x.

b) Suma liczby x i podwojonej liczby y wynosi 10. Połowa liczby x jest równa y.

6. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

a) Liczba a stanowi 40% liczby b. Gdy do 20% liczby a dodamy 60% liczby b, to otrzymamy 4.

Temat: Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania.

Jedną z metod rozwiązywania układów równań jest **metoda podstawiania**.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Wybieramy jedno z równań i wyznaczamy z niego jedną z niewiadomych. To, którą niewiadomą wyznaczymy, nie ma wpływu na ostateczne rozwiązanie układu równań.

$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$ Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania. Drugie równanie przepisujemy bez zmian.

W miejsce x w drugim równaniu podstawiamy wyrażenie $3y + 5$, dzięki czemu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą.

$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 4(3y + 5) + 5y = 3 \end{cases}$ Pierwsze równanie przepisujemy bez zmian. Podstawiamy wyrażenie $3y + 5$ w miejsce x w drugim równaniu.

$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 12y + 20 + 5y = 3 \end{cases}$ Rozwiązujemy drugie równanie z niewiadomą y.

$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 17y = -17 \ / : 17 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 \cdot (-1) + 5 \\ y = -1 \end{cases}$ Podstawiamy wyznaczoną wartość y do pierwszego równania i obliczamy niewiadomą x.

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ Otrzymana para liczb jest jedynym rozwiązaniem układu równań.

Aby przekonać się, czy nie popełniliśmy błędu, możemy sprawdzić otrzymane rozwiązanie, podstawiając je do układu równań:

$\begin{cases} 2 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 8 - 5 = 3 \end{cases}$ Spełnione pierwsze równanie. Spełnione drugie równanie.

Zatem otrzymana para liczb jest rozwiązaniem tego układu równań.

W wyniku przekształceń równań układu w kolejne równoważne równania otrzymujemy **równoważne układy równań**, czyli takie, które mają to samo rozwiązanie (są spełnione przez tę samą parę liczb).

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4x + y = 6 - 2y \\ 2y - x = 2 + y \end{cases}$ metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia obu równań do prostszej postaci – takiej, w której niewiadome znajdują się po jednej stronie równań.

$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y - x = 2 \end{cases}$ Wybierając równanie, z którego wyznaczymy niewiadomą, kierujemy się przede wszystkim łatwością obliczeń.

$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania.

$\begin{cases} 4x + 3(x + 2) = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$ Podstawiamy wyrażenie $x + 2$ w miejsce y w pierwszym równaniu.

$$\begin{cases} 4x + 3x + 6 = 6 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwsze równanie z niewiadomą x.

$$\begin{cases} 7x = 0 \ / : 7 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 2 \end{cases}$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej x podstawiamy do drugiego równania.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Para liczb $x = 0$, $y = 2$ jest rozwiązaniem podanego układu równań.

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia pierwszego równania do prostszej postaci, a następnie rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 \ / \cdot 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3 = 2(x + 1) - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3 = 2x + 2 - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + 2x - 7 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 4x = 8 \ / : 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb: $x = 2$, $y = -3$.

Nie każdy układ równań ma rozwiązanie. Na przykład układ równań:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x+y=8 \end{cases}$$

nie jest spełniony przez żadną parę liczb. (Jeśli suma dwóch liczb jest równa 7, to nie może być jednocześnie równa 8). Zauważmy, że również układ równań:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=7 \end{cases}$$

nie ma rozwiązania (dlaczego?).

Przykład 4

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x-2y=3 \\ -2x+4y=7 \end{cases}$ metodą podstawiania.

$$\begin{cases} x=3+2y \\ -2(3+2y)+4y=7 \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania. Podstawiamy wyrażenie $3+2y$ w miejsce x w drugim równaniu.

$$\begin{cases} x=3+2y \\ -6-4y+4y=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3+2y \\ 0y=13 \end{cases}$$

Drugie równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione przez żadną wartość niewiadomej y.

Zatem **żadna para liczb nie spełnia danego układu równań**.

Układ równań może mieć **nieskończenie wiele rozwiązań**. Np. układ równań:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$$

spełnia każda para liczb x, y, których suma jest równa 2.

Przykład 5

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 6x-2y=12 \\ -3x+y=-6 \end{cases}$ metodą podstawiania.

$$\begin{cases} 3x-y=6 \\ y=3x-6 \end{cases}$$

Doprowadzamy pierwsze równanie do prostszej postaci. Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania.

$$\begin{cases} 3x-(3x-6)=6 \\ y=3x-6 \end{cases}$$

Podstawiamy wyrażenie $3x-6$ w miejsce y w pierwszym równaniu.

$$\begin{cases} 3x-3x+6=6 \\ y=3x-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0x=0 \\ y=3x-6 \end{cases}$$

Równanie $0x=0$ (możemy je również zapisać $0=0$) jest zawsze spełnione, niezależnie od tego, jaką wartość wstawimy w miejsce niewiadomej x. Zatem o liczbie rozwiązań układu decyduje tylko drugie równanie, w którym występują obie niewiadome.

Równanie $y=3x-6$ jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb, co oznacza, że **układ równań jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb**, np. spełniają go pary liczb: $\begin{cases} x=0 \\ y=-6 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0{,}5 \\ y=-4{,}5 \end{cases}$

Układ równań z dwiema niewiadomymi x i y:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & \text{gdzie } a_1\neq 0 \text{ lub } b_1\neq 0 \\ a_2x+b_2y=c_2 & \text{gdzie } a_2\neq 0 \text{ lub } b_2\neq 0 \end{cases}$$

nazywamy **układem równań liniowych**.

Definicja

Układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest jedna para liczb, nazywamy **układem oznaczonym**.

Układ równań liniowych, który ma nieskończenie wiele rozwiązań, nazywamy **układem nieoznaczonym**.

Układ równań liniowych, który nie ma ani jednego rozwiązania, nazywamy **układem sprzecznym**.

Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x+6=3x+y \\ 4=x-2y+5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x=3y-2 \\ y-6x=-6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-3y=1-x-y \\ 0{,}2x+0{,}1y=-0{,}1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-3y=0{,}7 \\ x+4y=5{,}3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0{,}4x-0{,}3y=-2 \\ 1{,}6x+1{,}5y=46 \end{cases}$

2. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3(x-y)-4(x-y)=-5 \\ 6-x=2(x-3y)-18 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3-2(y-4x)=4(1-x)-19 \\ -3(2x-y+1)=-2y+26 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x-(2y-3x)=7y-9 \\ -3x+8=-2(x-2y-9) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4(3x-0{,}5)-5(y+0{,}5)=9 \\ -2x-5(y-2{,}5)=-9y+5{,}5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2(3-2(x-y))=23 \\ 6+5(1-3(y-x))=20x+1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4(x-1)-2(y-0{,}5)=7 \\ 3(x-2)+5(y-1{,}5)=13{,}5 \end{cases}$

3. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb całkowitych?

a) $\begin{cases} \frac{x+5}{2}+\frac{y}{2}=\frac{y+8}{4} \\ -3x-y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{2+x}{4}=\frac{y-1}{3} \\ \frac{5-x-y}{2}=\frac{x+2y}{5} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2x-6}{5}+6y=3 \\ x-6y-1=2y \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}+\frac{y-1}{3}=1 \\ \frac{x-2}{8}-\frac{y-1}{4}=2 \end{cases}$

4. Sprawdź, ile rozwiązań ma podany układ równań.

a) $\begin{cases} 2(x-3y)+3(x-2y)=1 \\ \frac{5}{2}x-2y=4(y+1) \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-7(y-1)=-2(\frac{5}{2}+x) \\ -2(1-2x-y)=1-x-5y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(x-2y)-2(y-x+1{,}5)=5 \\ \frac{2-x}{5}-0{,}3y=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3(1-x)-5(2-y)=5 \\ 0{,}2(2-3x)+y=0{,}8 \end{cases}$

5. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} (x+2)^2+2y=x+15+(x-2)(x+2) \\ x+(y-1)^2=1-(\sqrt{3}-y)(y+\sqrt{3}) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(1-2x)-y(1-y)=(y-\sqrt{2}x)(y+\sqrt{2}x)+3 \\ 2x-(2y-\frac{1}{4})^2+16\frac{1}{16}=(2y+3)(3-2y) \end{cases}$

6. Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony, czy sprzeczny.

a) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 2x+3(y-2)=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-y=2 \\ \frac{1}{2}y=2(x-1) \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2y-x=8 \\ x+4=2(y-2) \end{cases}$

Temat: Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników.

Inną metodą rozwiązywania układów równań jest **metoda przeciwnych współczynników**.

Przykład 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 6y = 13 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

Zauważmy, że współczynniki przy niewiadomej x są liczbami przeciwnymi (1 i -1). Aby zredukować taką niewiadomą, wystarczy dodać oba równania stronami – otrzymamy równanie z jedną niewiadomą y.

$$+\begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 6y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - x + 3y + 6y &= -4 + 13 \\ 9y &= 9 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Dodajemy równania stronami. Niewiadoma x została zredukowana.

Wyznaczoną wartość niewiadomej y podstawiamy do jednego z równań wyjściowego układu, na przykład do równania $x + 3y = -4$. Otrzymujemy:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + 3 \cdot 1 = -4 \end{cases}$$

Podstawiamy liczbę 1 w miejsce y w równaniu $x + 3y = -4$ i obliczamy niewiadomą x.

Stąd otrzymujemy jako rozwiązanie układu równań parę liczb:

$$\begin{cases} x = -7 \\ y = 1 \end{cases}$$

Sprawdzenie

$$\begin{cases} -7 + 3 \cdot 1 = -7 + 3 = -4 \\ -(-7) + 6 \cdot 1 = 7 + 6 = 13 \end{cases}$$

Spełnione pierwsze równanie.
Spełnione drugie równanie.

Czasami zanim dodamy równania stronami, musimy najpierw pomnożyć obie strony jednego równania (lub obu równań) przez taką liczbę (lub liczby), aby współczynniki przy jednej z niewiadomych w obu równaniach były liczbami przeciwnymi.

Przykład 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Współczynniki przy żadnej z niewiadomych nie są liczbami przeciwnymi. Przekształcimy zatem jedno z równań tak, by otrzymać przeciwne współczynniki przy niewiadomej y.

$$\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + \ \ y = 3 \ / \cdot (-4) \end{cases}$$

Mnożymy obie strony drugiego równania przez -4.

$$+\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ -8x - 4y = -12 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami i wykonujemy redukcję wyrazów podobnych.

$$5x - 8x = 6 - 12$$

Niewiadoma y została zredukowana.

Rozwiązujemy równanie z niewiadomą x:

$$-3x = -6, \text{ stąd } x = 2.$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej x podstawiamy do równania $2x + y = 3$.

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 + y = 3 \end{cases}$$ Podstawiamy liczbę 2 w miejsce x w równaniu $2x + y = 3$.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Otrzymana para liczb $x = 2$, $y = -1$ jest rozwiązaniem podanego układu.

Przykład 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x + 7y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie układu równań rozpoczynamy od pomnożenia każdego z równań przez takie liczby, aby przy jednej z niewiadomych otrzymać przeciwne współczynniki.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \ / \cdot 5 \\ 5x + 7y = 4 \ / \cdot (-2) \end{cases}$$ Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 5, a drugiego przez -2.

$$+\begin{cases} 10x + 15y = 10 \\ -10x - 14y = -8 \end{cases}$$

$$\overline{\qquad\qquad y = 2}$$ Dodajemy równania stronami. Niewiadoma x została zredukowana.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$ Otrzymujemy nowy, równoważny układ równań.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3 \cdot 2 = 2 \end{cases}$$ Podstawiamy liczbę 2 w miejsce y w drugim równaniu.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x = -4 \ / : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb: $x = -2$, $y = 2$.

Temat: Rozwiązywanie układów równań.

Przykład 4

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5(x-y)+5=2(2x+y) \\ 2(x-1)=y+1 \end{cases}$

Rozpoczynamy od doprowadzenia równań układu do najprostszej postaci.

$\begin{cases} 5x-5y+5=4x+2y \\ 2x-2=y+1 \end{cases}$ Redukujemy wyrazy podobne. Niewiadome zapisujemy po lewej stronie każdego równania.

$\begin{cases} x-7y=-5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Otrzymany układ równań możemy rozwiązać jedną z dwóch metod.

Metoda podstawiania

$\begin{cases} x=-5+7y \\ 2(-5+7y)-y=3 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-5+7y \\ -10+14y-y=3 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-5+7y \\ 13y=13 \ / :13 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-5+7y \\ y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-5+7 \\ y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Metoda przeciwnych współczynników

$\begin{cases} x-7y=-5 \ / \cdot(-2) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

$$+\begin{cases} -2x+14y=10 \\ 2x \quad -y=3 \end{cases}$$

$13y=13 \ / :13$

$y=1$

$\begin{cases} y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

$\begin{cases} y=1 \\ 2x-1=3 \end{cases}$

$\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$

Rozwiązanie układu równań nie zależy od:
- wyboru metody rozwiązywania,
- kolejności równań w układzie – można ją zmienić na każdym etapie rozwiązywania.

W przypadku metody podstawiania rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru wyznaczonej niewiadomej i tego, z którego równania ją wyznaczamy.

W przypadku metody przeciwnych współczynników rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru niewiadomej, którą redukujemy.

Rozpatrywane poprzednio układy równań były układami oznaczonymi. Pokażemy, jak wygląda rozwiązywanie metodą przeciwnych współczynników układu sprzecznego oraz nieoznaczonego.

Przykład 5

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ -x+\frac{2}{3}y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x-2y=4 \\ -x+\frac{2}{3}y=1 \ / \cdot 3 \end{cases}$ Mnożymy obie strony drugiego równania przez 3.

$$+\begin{cases} 3x-2y=4 \\ -3x+2y=3 \end{cases}$$

$0x+0y=7$

Dodajemy równania stronami. Obie niewiadome zostały zredukowane. Otrzymaliśmy równanie sprzeczne.

Równania $0x + 0y = 7$ (można je zapisać w postaci $0 = 7$) nie spełnia żadna para liczb x i y, zatem układ równań jest sprzeczny.

Przykład 6

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \;/ \cdot 3 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \;/ \cdot 4 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 3, a drugiego przez 4.

$$+\begin{cases} -15x + 2y = -12 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 0x + 0y = 0 \quad}$$

Dodajemy równania stronami. Obie niewiadome zostały zredukowane. Otrzymaliśmy równanie tożsamościowe.

Równanie $0x + 0y = 0$ (można je zapisać w postaci $0 = 0$) spełnia dowolna para liczb x i y. Wyjściowy układ równań jest równoważny nieoznaczonemu układowi równań:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases}$$

Układ ten jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb, które spełniają drugie równanie. Jego rozwiązanie można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \frac{15}{2}x - 6 \end{cases}$$

Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 8y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2(2x + 3y) = 30 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = 15 \\ 7x + 2y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 5y = 3{,}5 \\ -4x + 2y = -7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2(x + y) = 2 - 2y \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

2. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x - 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}y + 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0{,}2(x + 2y) - 0{,}3(2x - y) = 3{,}5 \\ 2(x + y) - (x - 2) = 2y + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{3}(x + y) \\ \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}(y + 3x) = -4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 0{,}01(4x - y) = 0{,}01y + 0{,}02 \\ 0{,}6(y - x) = 0{,}1(y + 2x + 1) \end{cases}$

3. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 5(y + 2) + x = 3x + y \\ \frac{y + 2{,}5}{5} = x + 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2(x + 1) = 3(y - 1) + 13 \\ \frac{x - y}{3} = \frac{3x}{2} + \frac{3y}{4} + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ (x + 1)(x + 1) - y = x(x + 1) \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} = \frac{5y - x}{3} - \frac{7y - 3x}{5} \\ 5(x + 1) = 3(y - 1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x - 1}{2} + \frac{y + 1}{3} = 3 \\ \frac{x + 1}{3} - \frac{y - 2}{6} = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{3} = 1 \\ \frac{5}{2}y - 2 = 1 - \frac{1}{2}x \end{cases}$