Temat: Zdarzenia losowe.

Rzut monetą czy rzut kostką to przykłady doświadczeń losowych, czyli takich doświadczeń, których wyniku nie możemy przewidzieć. W przypadku jednokrotnego rzutu monetą możliwe wyniki to orzeł lub reszka. W przypadku jednokrotnego rzutu kostką mamy sześć możliwych wyników: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek.

Poszczególne wyniki doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniami elementarnymi**, a ich zbiór – **przestrzenią zdarzeń elementarnych** lub krótko **przestrzenią**. Zgodnie z tradycją przestrzeń zdarzeń elementarnych oznaczamy grecką wielką literą omega – Ω, a pojedyncze zdarzenia elementarne – małą literą omega – ω.

Przykład 1

a) Przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu monetą: $\Omega = \{o, r\}$, gdzie o oznacza otrzymanie orła, a r – reszki.

b) Przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

c) Przyjmujemy, że przestrzenią zdarzeń elementarnych w doświadczeniu polegającym na rzucie najpierw monetą, a następnie kostką, jest zbiór:
$\Omega = \{(r,1), (r,2), (r,3), (r,4), (r,5), (r,6), (o,1), (o,2), (o,3), (o,4), (o,5), (o,6)\}$.

DEFINICJA

Zdarzeniem losowym nazywamy dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω.

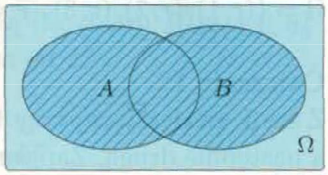
Zdarzenia losowe, zwane krótko zdarzeniami, oznaczamy wielkimi literami: A, B, C itd.

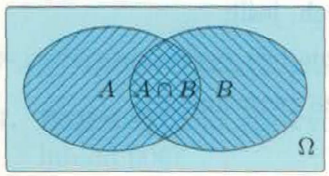
Zbiór Ω nazywamy zdarzeniem **pewnym**, natomiast zbiór pusty nazywamy zdarzeniem **niemożliwym**. Elementy zdarzenia A nazywamy **wynikami sprzyjającymi** zdarzeniu A.

Zdarzenia losowe są zbiorami, zatem możemy na nich wykonywać takie same działania jak na zbiorach.

Niech $A, B \subset \Omega$.

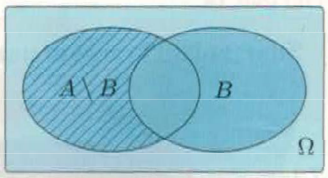
Sumą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cup B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające A lub B.





Iloczynem zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cap B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie A i B.

Różnicą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \setminus B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające A i niesprzyjające B.



Mówimy, że zdarzenia A i B są **rozłączne** lub **wykluczają się**, jeśli część wspólna $A \cap B$ tych zdarzeń jest zdarzeniem niemożliwym ($A \cap B = \emptyset$).

Zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy **zdarzeniem przeciwnym** do zdarzenia A. Zauważ, że $A \cap A' = \emptyset$ oraz $A \cup A' = \Omega$.

Zadanie 1

Rzucamy trzy razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – suma wyrzuconych oczek jest równa 17,
B – suma wyrzuconych oczek jest nie większa niż 6,
C – iloczyn wyrzuconych oczek jest równy 36.

a) $A = \{(5,6,6), (6,5,6), (6,6,5)\}$

b) $B = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$

c) $C = \{(1,6,6), (6,1,6), (6,6,1), (2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,6,2), (6,2,3), (6,3,2)\}$

Zadanie 2

Z urny, w której jest pięć kul ponumerowanych od 1 do 5, losujemy kolejno, bez zwracania, dwie kule.

a) Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom: A – za drugim razem wylosowano liczbę parzystą, B – iloczyn wylosowanych liczb jest równy 4, C – pierwsza wylosowana liczba jest mniejsza od drugiej.

b) Wyznacz zdarzenia: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$ i $A \cap B \cap C$.

a) $A = \{(1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (1,4), (2,4), (3,4), (5,4)\}$

$B = \{(1,4), (4,1)\}$

$C = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$

$A \cup B = \{(1,2), (3,2), (4,1), (4,2), (5,2), (1,4), (2,4), (3,4), (5,4)\}$

$A \cap B = \{(1,4)\}$

$B \cap C = \{(1,4)\}$

$A \cap B \cap C = \{(1,4)\}$

Temat: Prawdopodobieństwo klasyczne (1 i 2).

Rzucając kostką, możemy otrzymać jeden z wyników należących do zbioru $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Przyjmujemy, że kostka jest symetryczna (wszystkie wyniki pojawiają się równie często), zatem **prawdopodobieństwo** otrzymania któregokolwiek z wyników jest równe $\frac{1}{6}$. Rozpatrzmy zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek. Zauważmy, że zdarzeniu temu sprzyjają trzy wyniki: 2, 4 i 6. Zatem prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Jeżeli wszystkie wyniki doświadczenia są jednakowo prawdopodobne (zdarzają się równie często), mówimy, że mamy do czynienia ze **schematem (prawdopodobieństwem) klasycznym**. W takiej sytuacji **prawdopodobieństwo** dowolnego zdarzenia A zawartego w przestrzeni Ω określamy następująco:

DEFINICJA

Jeżeli Ω jest zbiorem skończonym i niepustym, to prawdopodobieństwem zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Przykład 1

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek większej od 10 w dwukrotnym rzucie symetryczną kostką.

$\Omega = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)\}$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych ma 36 elementów:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 36$$

Zdarzenie, którego prawdopodobieństwo chcemy obliczyć, ma 3 elementy:

$$A = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}, \text{ stąd } \overline{\overline{A}} = 3$$

Zatem: $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Przykład 2

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadnie mniej orłów niż reszek.

$$\Omega = \{(o,o,o), (o,o,r), (o,r,o), (r,o,o), (o,r,r), (r,o,r), (r,r,o), (r,r,r)\}$$

Zatem $\overline{\overline{\Omega}} = 8$. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na otrzymaniu mniejszej liczby orłów niż reszek:

$$A = \{(o,r,r), (r,o,r), (r,r,o), (r,r,r)\}$$

Zatem $\overline{\overline{A}} = 4$ i stąd $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

ZADANIA

1. Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – wypadły co najmniej trzy orły,
B – liczba orłów jest równa liczbie reszek,
C – wypadła parzysta liczba reszek.
Które z tych zdarzeń jest najbardziej prawdopodobne?

2. Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

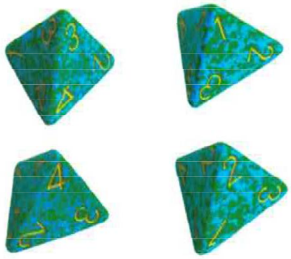
a) liczba oczek otrzymana w drugim rzucie jest o 2 większa od liczby oczek otrzymanej w pierwszym rzucie,

b) liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się co najwyżej o 1.

3. Rzucając czworościenną symetryczną kostką, możemy otrzymać jedną z liczb: 1, 2, 3 lub 4 (podaną przy wierzchołku kostki).

a) Gracz rzucający dwukrotnie taką kostką wygrywa, jeśli suma wyrzuconych liczb jest większa od 5. Wypisz wyniki sprzyjające wygranej i oblicz jej prawdopodobieństwo.

b) Gracz rzucający trzykrotnie taką kostką wygrywa, jeśli suma wyrzuconych liczb jest nie mniejsza od 10. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej.



4. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy trzykrotnym rzucie symetryczną monetą orzeł wypadnie co najmniej dwa razy.

5. a) Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie ona podzielna przez 3.

b) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru liczb dwucyfrowych liczby podzielnej przez 3.

c) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru liczb trzycyfrowych liczby podzielnej przez 5.

6. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich liczb dwucyfrowych liczby, której suma cyfr jest równa: a) 11, b) 6.

7. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich liczb trzycyfrowych liczby, której suma cyfr jest równa: a) 2, b) 3.

8. Na loterii jest 60 losów, w tym 12 wygrywających. Kupujemy 1 los.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to los wygrywający.

b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to los wygrywający, jeżeli przed nami kupiono już 4 losy i były to losy wygrywające.

9. Na pewnej loterii jest 5 losów wygrywających. Kupujemy 1 los. Ile powinno być wszystkich losów na tej loterii, aby prawdopodobieństwo tego, że kupimy los wygrywający, było większe od 0,2?

zad. 2

$\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$

a) $A = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6)\}$

$\overline{\overline{A}} = 4$

$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

b) $B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4),$

$(4,5), (5,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$

$\overline{\overline{B}} = 16$

$P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

Zad. 5

a) $\overline{\overline{\Omega}} = 10$

$\overline{\overline{A}} = 3$

$P(A) = \frac{3}{10}$

b) $\overline{\overline{\Omega}} = 90$

$\overline{\overline{A}} = 30$

$P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$

c) $\overline{\overline{\Omega}} = 900$

$\overline{\overline{A}} = 180$

$P(A) = \frac{180}{900} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Zad. 8

a) $\overline{\overline{A}} = 12 \quad \overline{\overline{\Omega}} = 60$

$P(A) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

b) $\overline{\overline{A}} = 8 \quad \overline{\overline{\Omega}} = 56$

$P(A) = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$

Zad. 9

n - liczba wszystkich losów

$n > 5$

$P(A) = \frac{5}{n}$

$P(A) > 0,2$

$\frac{5}{n} > 0,2 \quad / \cdot n$

$5 > 0,2n \quad / \cdot 5$

$25 > n$

Odp. Aby prawdopodobieństwo wygranej było większe od 0,2, to liczba wszystkich losów musi być mniejsza od 25.

Temat: Własności prawdopodobieństwa (1 i 2).

TWIERDZENIE

Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo P. Wówczas dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$:

1. $P(A) \geqslant 0$ oraz $P(A) \leqslant 1$,
2. $P(\emptyset) = 0$ oraz $P(\Omega) = 1$,
3. jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leqslant P(B)$,
4. $P(A') = 1 - P(A)$.

Przykład 1

Rzucamy trzykrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz wypadnie orzeł.

$\overline{\overline{\Omega}} = 8$. Niech A oznacza zdarzenie polegające na otrzymaniu przynajmniej jednego orła w trzech rzutach. Rozpatrzmy zdarzenie A' przeciwne do zdarzenia A. Polega ono na wyrzuceniu samych reszek: $A' = \{(r, r, r)\}$. Zatem $\overline{\overline{A'}} = 1$, czyli:

$$P(A') = \frac{\overline{\overline{A'}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{1}{8}$$

Stąd:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

TWIERDZENIE

Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo P. Wówczas dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

TWIERDZENIE

Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo P. Wówczas jeśli zdarzenia A i $B \subset \Omega$ wykluczają się ($A \cap B = \emptyset$), to:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

TWIERDZENIE

Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, na którym zostało określone prawdopodobieństwo P. Wówczas dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$:

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ZADANIA

1. Rzucamy dwukrotnie kostką. Zdarzenie A polega na tym, że w każdym rzucie otrzymamy inną liczbę oczek, a zdarzenie B – że ani razu nie otrzymamy szóstki. Podaj opis zdarzenia A' oraz zdarzenia B'. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: A', A, B' i B.

2. Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń: A – suma oczek, które wypadną w obydwu rzutach, jest równa co najmniej 4, B – iloczyn oczek, które wypadną w obydwu rzutach, jest mniejszy od 25.

3. a) Rzucamy czterokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że reszka wypadnie co najwyżej trzy razy.

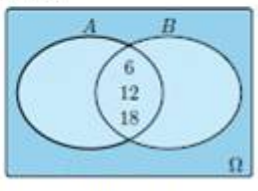
   b) Rzucamy pięciokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że moneta nie upadnie pięć razy tą samą stroną do góry.

4. Rzucamy trzykrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

   a) szóstka wypadnie co najwyżej dwa razy,

   b) ta sama liczba oczek nie powtórzy się trzykrotnie.

5. Z liczb od 1 do 20 losowo wybieramy jedną liczbę. Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 2, a B – podzielnej przez 3. Przerysuj do zeszytu i uzupełnij diagram, a następnie podaj: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$.



Sprawdź prawdziwość równości: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

6. a) Losujemy jedną liczbę spośród: $1, 2, 3, \ldots, 50$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba ta jest podzielna przez 2 lub przez 3.

b) Losujemy jedną liczbę spośród: $1, 2, 3, \ldots, 100$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba ta jest podzielna przez 2 lub przez 5.

7. Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
A – w obu rzutach otrzymano parzystą liczbę oczek lub obie otrzymane liczby oczek są większe od 3,
B – iloczyn liczb otrzymanych oczek jest nieparzysty lub większy od 24.

8. Z ankiety dotyczącej znajomości języka francuskiego i hiszpańskiego przeprowadzonej w pewnej grupie uczniów wynika, że $\frac{3}{5}$ z nich zna język francuski, $\frac{1}{4}$ – zna oba języki, natomiast $\frac{9}{10}$ – zna co najmniej jeden z tych języków. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że uczeń losowo wybrany z tej grupy zna język hiszpański.

9. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cup B)$ oraz $P(A \setminus B)$, jeśli:
a) $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$,
b) $P(A) = \frac{5}{12}$, $P(B) = \frac{5}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

10. Niech $A, B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$, jeśli:
a) $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}6$ i $A \cup B$ jest zdarzeniem pewnym,
b) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ i $P(A \cap B) = \frac{4}{9}P(A \cup B)$.

11. a) Uzasadnij, że jeśli $B \subset A \subset \Omega$, to $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.
b) Niech $B \subset A \subset \Omega$. Oblicz $P(A \setminus B)$, jeśli $P(A) = 0{,}95$ i $P(B) = 0{,}48$.

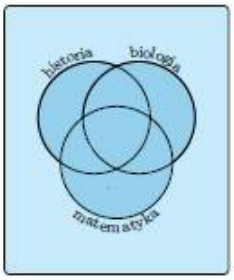
12. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Czy zdarzenia $A, B \subset \Omega$ mogą się wykluczać, jeśli $P(A) = \frac{1}{2}$ i $P(B) = \frac{3}{5}$?
> Dla zdarzeń wykluczających się spełniony jest warunek:
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
> Zatem $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{11}{10} > 1$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że zdarzenia A i B nie mogą się wykluczać.

Czy zdarzenia $A, B \subset \Omega$ mogą się wykluczać?
a) $P(A) = \frac{4}{5}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ b) $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$

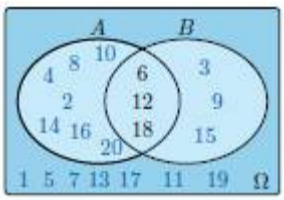
13. W ankiecie przeprowadzonej wśród 200 uczniów klas trzecich pewnego liceum otrzymano następujące wyniki:
– matematykę lubi 100 uczniów,
– historię lubi 90 uczniów,
– biologię lubi 35 uczniów,
– matematykę i historię lubi 25 uczniów,
– matematykę i biologię lubi 15 uczniów,
– historię i biologię lubi 20 uczniów,
– matematykę, historię i biologię lubi 5 uczniów.

Przerysuj przedstawiony obok diagram do zeszytu i go uzupełnij. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń nie lubi żadnego z wymienionych przedmiotów.



2. $\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$
A' – suma oczek, które wypadną w obydwu rzutach jest mniejsza niż 4
$A' = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$, $\overline{\overline{A'}} = 3$, czyli $P(A') = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
Zatem $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.
B' – iloczyn oczek, które wypadną w obydwu rzutach jest nie mniejszy niż 25
$B' = \{(5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$, $\overline{\overline{B'}} = 4$, czyli $P(B') = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
Zatem $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

5. $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$
$P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
$P(A \cap B) = \frac{3}{20}$
$P(A \cup B) = \frac{13}{20}$



$L = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P$

$P = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{3}{20} =$

$= \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = P(A \cup B) = P$

$L = P$

Równość jest prawdziwa

Zad. 10

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

a) $P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}6 - 1$

$P(A \cap B) = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$

b) $P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} P(A \cup B) \quad / + \frac{4}{9} P(A \cup B)$

$P(A \cup B) + \frac{4}{9} P(A \cup B) = \frac{3}{12} + \frac{8}{12}$

$\frac{13}{9} P(A \cup B) = \frac{11}{12} \quad / \cdot \frac{9}{13}$

$P(A \cup B) = \frac{11}{12_4} \cdot \frac{9}{13}$

$P(A \cup B) = \frac{33}{52}$

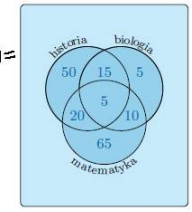
$P(A \cap B) = \frac{1}{8_3} \cdot \frac{33}{52_{13}}^{11} = \frac{11}{39}$

Zad. 13

$200 - (50 + 15 + 5 + 20 + 5 + 10 + 65) =$

$= 200 - 170 = 30$

$P(A) = \frac{30}{200} = \frac{3}{20}$



Temat: Prawdopodobieństwo warunkowe.

Przykład 1

Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma otrzymanych oczek:

a) jest równa 11, b) jest równa 11, jeśli w pierwszym rzucie wypadło 5 oczek.

a) $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\}$, zatem $\overline{\overline{\Omega}} = 36$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu sumy oczek równej 11. Zdarzeniu A sprzyjają dwa wyniki: $(5,6)$ i $(6,5)$, zatem $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

b) Niech B będzie zdarzeniem polegającym na wyrzuceniu 5 oczek w pierwszym rzucie: $B = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$. Spośród tych zdarzeń elementarnych jedynie wynik $(5,6)$ daje sumę oczek równą 11. Możemy to zapisać następująco: $A \cap B = \{(5,6)\}$. Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe:

$$\frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{1}{6}$$

Wyrzucenie 5 oczek w pierwszym rzucie zwiększa więc szansę uzyskania sumy 11 oczek w obydwu rzutach kostką.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A, gdy wiemy, że zaszło zdarzenie B, nazywamy **prawdopodobieństwem warunkowym** i oznaczamy $P(A|B)$. Zauważ, że w schemacie klasycznym mamy $P(A|B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}}$. Zatem:

$$P(A|B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}} = \frac{\frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}}{\frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

DEFINICJA

Niech $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwo zdarzenia A **pod warunkiem**, że zaszło zdarzenie B, określamy wzorem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ćwiczenie 1

$\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$

A – suma wyrzuconych oczek jest mniejsza od 10

a) A' – suma wyrzuconych oczek jest równa nie mniej niż 10

$A' = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$

Ćwiczenie 1

Rzucamy dwukrotnie kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek:

a) jest mniejsza od 10,

b) jest mniejsza od 10, jeśli w pierwszym rzucie wypadło 5 oczek,

c) jest mniejsza od 10, jeśli w pierwszym rzucie wypadło 1 oczko.

b) B – w pierwszym rzucie wypadło 5 oczek

$A \cap B$ – suma wyrzuconych oczek jest mniejsza od 10 i w pierwszym rzucie wypadło 5 oczek

$A \cap B = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$

$P(A|B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

c) C – w pierwszym rzucie wypadło 1 oczko

$A \cap C$ – suma wyrzuconych oczek jest mniejsza od 10 i w pierwszym rzucie wypadło 1 oczko

$P(A|C) = \frac{6}{6} = 1$

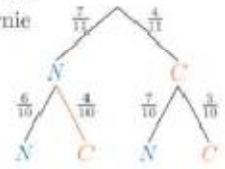
Przykład 2

W urnie jest 7 kul niebieskich i 4 czerwone. Losujemy z niej kolejno, bez zwracania, dwie kule. Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu za drugim razem kuli czerwonej, a B – na wylosowaniu za pierwszym razem kuli niebieskiej. Oblicz $P(A|B)$.

Drzewo obok jest ilustracją tego doświadczenia. Jeśli za pierwszym razem wyciągnęliśmy kulę niebieską, to w urnie pozostało 6 kul niebieskich i 4 czerwone. Zatem:

$$P(A|B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Gałąź zaznaczona kolorem czerwonym przedstawia ten etap doświadczenia, który nas interesuje.



Ćwiczenie 5

Na egzaminie należy wylosować 3 pytania z 10. Student potrafi odpowiedzieć na 7 pytań. Zda egzamin, jeśli odpowie na co najmniej 2 pytania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że student zda egzamin, jeśli na pierwsze z wylosowanych pytań: a) potrafi odpowiedzieć, b) nie potrafi odpowiedzieć.

Ćwiczenie 5

I sposób

A – student zda egzamin

a) B – na pierwsze pytanie potrafi odpowiedzieć

$\overline{B} = 7 \cdot 9 \cdot 8$

$\overline{\overline{A \cap B}} = 7 \cdot 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 = 7 \cdot 6 \cdot 11$

$P(A|B) = \frac{6 \cdot 7 \cdot 11}{7 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{11}{12}$

b) C – na pierwsze pytanie nie potrafi odpowiedzieć

$\overline{C} = 3 \cdot 9 \cdot 8$

$\overline{A \cap C} = 3 \cdot 7 \cdot 6$

$P(A|C) = \frac{3 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{7}{12}$

Ćwiczenie 5 II sposób

A – student zda egzamin

a) B – na pierwsze pytanie potrafi odpowiedzieć

Student musi odpowiedzieć na co najmniej jedno z dwóch wylosowanych pytań, przy czym na 6 potrafi odpowiedzieć, a na 3 nie.

$P(A|B) = \frac{6 \cdot 3 + \binom{6}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{18+15}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$

b) C – na pierwsze pytanie nie potrafi odpowiedzieć

Student musi odpowiedzieć na pozostałe dwa pytania, przy czym na 7 potrafi odpowiedzieć, a na 2 nie.

$P(A|C) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

ZADANIA

1. Rzucamy dwa razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadła co najmniej raz szóstka, jeśli wiadomo, że:
   a) suma oczek, które wypadły w obydwu rzutach, była nieparzysta,
   b) suma oczek, które wypadły w obydwu rzutach, była parzysta,
   c) w pierwszym rzucie wypadło więcej oczek niż w drugim,
   d) w drugim rzucie wypadła szóstka.

2. Rzucamy trzy razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
   a) suma oczek jest równa 13, jeśli w drugim rzucie wypadły 3 oczka,
   b) zarówno w drugim, jak i w trzecim rzucie wypadła nieparzysta liczba oczek, jeśli suma oczek w trzech rzutach była równa 6.

3. Z urny, w której jest 6 kul białych i 8 czarnych, losujemy kolejno trzy kule bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za trzecim razem wylosujemy:
   a) kulę białą, jeśli pierwsze dwie wylosowane kule były białe,
   b) kulę czarną, jeśli pierwsze dwie wylosowane kule były różnego koloru.