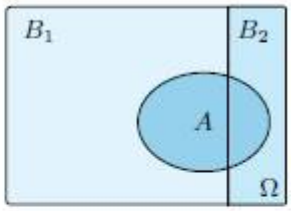
Temat: Prawdopodobieństwo całkowite (1 i 2).

Przykład 1

Wydawnictwo wydrukowało 80% nakładu pewnej książki w drukarni I, a pozostałe 20% – w drukarni II. Wady ma 0,1% książek z drukarni I i 0,6% książek z drukarni II. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana książka jest wadliwa.



Oznaczmy przez A zdarzenie, że wybrana książka jest wadliwa, przez B_1, że pochodzi z drukarni I, a przez B_2, że pochodzi z drukarni II. Mamy wówczas:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$$

Zdarzenia $(A \cap B_1)$ i $(A \cap B_2)$ wykluczają się, zatem:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$$

Stąd:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

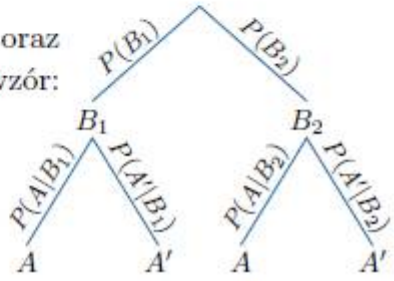
Podstawiamy $P(B_1) = 0{,}8$, $P(A|B_1) = 0{,}001$, $P(B_2) = 0{,}2$, $P(A|B_2) = 0{,}006$ i otrzymujemy:

$$P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}001 + 0{,}2 \cdot 0{,}006 = 0{,}002$$

W powyższym przykładzie mieliśmy $B_1 \cup B_2 = \Omega$ oraz $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Zastosowany przy tych założeniach wzór:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

nosi nazwę **wzoru na prawdopodobieństwo całkowite**. Drzewo obok jest ilustracją graficzną tego wzoru.



WZÓR NA PRAWDOPODOBIEŃSTWO CAŁKOWITE

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia. Jeśli zdarzenia: $B_1, B_2, \ldots, B_n$ spełniają następujące warunki:
– zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich $(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega)$,
– prawdopodobieństwo każdego z nich jest dodatnie,
– zdarzenia parami się wykluczają,
to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ opisuje wzór:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

Ćwiczenie 1

a) Fabryka współpracuje z dwoma kooperantami dostarczającymi śruby. Od I kooperanta pochodzi 40% śrub, od II – 60%. Wady ma 0,2% śrub dostarczonych przez I kooperanta i 0,1% — dostarczonych przez II. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana śruba jest wadliwa.

b) Fabryka kupuje 40% potrzebnych części od kooperanta A, 35% – od kooperanta B i 25% – od kooperanta C. Wady ma 1% części dostarczonych przez kooperanta A, 2% – dostarczonych przez kooperanta B i 4% – dostarczonych przez kooperanta C. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybrana losowo część jest wadliwa.

Ćwiczenie 1

a) A – wybrana śruba jest wadliwa
B_1 – wybrana śruba pochodzi od I kooperanta
B_2 – wybrana śruba pochodzi od II kooperanta
$B_1 \cup B_2 = \Omega$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$
$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}002 + 0{,}6 \cdot 0{,}001 = 0{,}0014$

b) A – wybrana śruba jest wadliwa
B_1 – wybrana śruba pochodzi od kooperanta A
B_2 – wybrana śruba pochodzi od kooperanta B
B_3 – wybrana śruba pochodzi od kooperanta C
$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$,
$B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \cap B_3 = \emptyset$, $B_2 \cap B_3 = \emptyset$,
$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}01 + 0{,}35 \cdot 0{,}02 + 0{,}25 \cdot 0{,}04 = 0{,}021$

ZADANIA

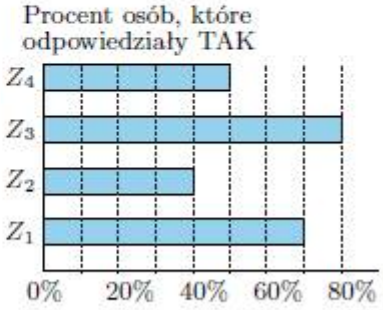
1. Trzy brygady: B_1, B_2 i B_3 produkują deski do prasowania. Wśród desek wyprodukowanych przez brygadę B_1 jest 6% wadliwych, a wśród wyprodukowanych przez B_2 i B_3 – po 3%. W magazynie znajduje się po tyle samo desek wytworzonych przez każdą z brygad. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana z magazynu deska jest wadliwa.

2. W hurtowni zabawek 60% gumowych dinozaurów pochodzi z fabryki X. Pozostałe wyprodukowano w równych częściach w fabrykach Y i Z. Wadliwych jest 2% dinozaurów z fabryki X, 3% – z fabryki Y i 1% – z fabryki Z. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany dinozaur nie ma wad.



3. Cztery maszyny: M_1, M_2, M_3 i M_4 produkują żarówki. Maszyny: M_1, M_2 i M_3 wyprodukowały taką samą liczbę żarówek, maszyna M_4 – dwa razy więcej niż każda z pozostałych. Maszyny M_1 i M_2 produkują po 2% wadliwych żarówek, a M_3 i M_4 – po 4%. Wszystkie wytworzone żarówki znajdują się w magazynie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana z magazynu żarówka jest wadliwa, jeśli nie została wyprodukowana przez maszynę M_1.

4. W pewnym mieście są cztery zakłady fryzjerskie. $\frac{1}{4}$ mieszkańców korzysta z usług zakładu Z_1, $\frac{1}{5}$ – z Z_2, $\frac{3}{10}$ – z Z_3 i $\frac{1}{20}$ – z Z_4. Pozostali mieszkańcy nie korzystają z usług tych zakładów oraz nikt nie korzysta z usług dwóch zakładów. Mieszkańcom zadano pytanie: „Czy jesteś zadowolony z usług swojego fryzjera?". Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie.



Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany mieszkaniec tego miasta korzysta z usług zakładu fryzjerskiego i jest z niego zadowolony.

5. W pewnej grupie, liczącej m dziewcząt i n chłopców, 25% dziewcząt i 60% chłopców interesuje się hokejem. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba z tej grupy interesuje się hokejem, wynosi $\frac{3}{7}$. Oblicz stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców w tej grupie.

6. Zbiór zadań z matematyki podzielony jest na 6 rozdziałów: I, II, III, IV, V, VI. Liczbę zadań w poszczególnych rozdziałach przedstawiono na diagramie A, natomiast liczbę zadań w poszczególnych rozdziałach, które należy rozwiązać, korzystając z kalkulatora, przedstawiono na diagramie B. Rzucamy kostką i wybieramy rozdział, którego numer jest równy liczbie wyrzuconych oczek, a następnie losujemy jedno zadanie z tego rozdziału. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowane zadanie należy rozwiązać bez użycia kalkulatora.

Diagram A

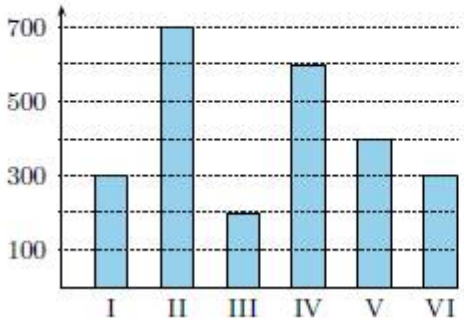
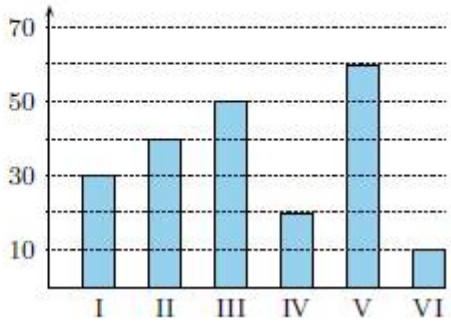


Diagram B

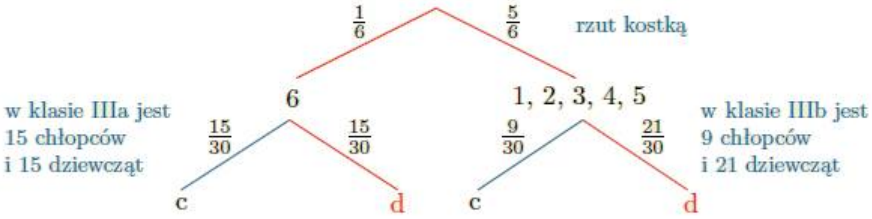


Temat: Doświadczenia wieloetapowe (1 i 2).

Przykład 1

W klasie IIIa jest 15 chłopców i 15 dziewcząt, w klasie IIIb jest 9 chłopców i 21 dziewcząt. Rzucamy kostką: jeśli wypadnie szóstka, to losujemy jedną osobę z klasy IIIa, w przeciwnym razie losujemy jedną osobę z klasy IIIb. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowaną osobą będzie dziewczyna.

Przedstawiamy na drzewie ilustrację tego doświadczenia.



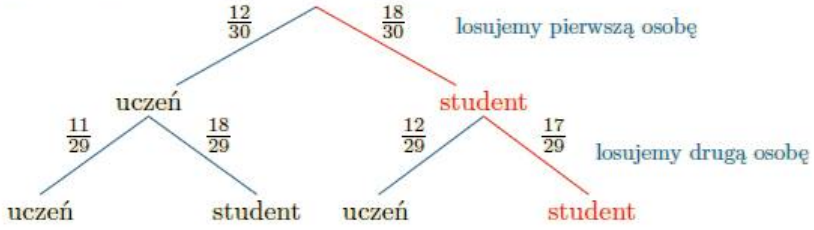
Zdarzeniu A polegającemu na wylosowaniu dziewczyny sprzyja wyrzucenie 6 oczek i wylosowanie dziewczyny z klasy IIIa oraz wyrzucenie liczby oczek mniejszej od 6 i wylosowanie dziewczyny z klasy IIIb. Zatem:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{30} + \frac{5}{6} \cdot \frac{21}{30} = \frac{1}{12} + \frac{7}{12} = \frac{2}{3}$$

Przykład 2

Wśród 30 uczestników wycieczki jest 12 uczniów i 18 studentów. Biuro turystyczne postanowiło zwrócić połowę kosztów wycieczki dwóm losowo wybranym osobom. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zwrot otrzyma przynajmniej jeden uczeń.

Przebieg losowania ilustrujemy za pomocą drzewa.



Niech zdarzenie A oznacza, że wśród wylosowanych dwóch osób jest przynajmniej jeden uczeń. Rozpatrzmy zdarzenie A' – wśród wylosowanych nie ma ani jednego ucznia (na drzewie oznaczone kolorem czerwonym): $P(A') = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145}$ Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{51}{145} = \frac{94}{145} \approx 0{,}65$$

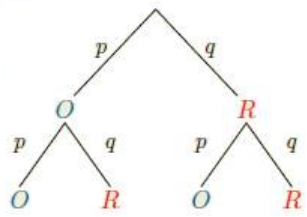
Przykład 3

Dla pewnej niesymetrycznej monety prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi p, a prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki – q. Oblicz p i q, jeśli prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wyrzuceniu co najmniej jednej reszki przy dwukrotnym rzucie tą monetą jest równe $\frac{8}{9}$.

Rozpatrzmy zdarzenie A' polegające na wyrzuceniu dwóch orłów. Mamy $P(A') = p^2$ oraz:

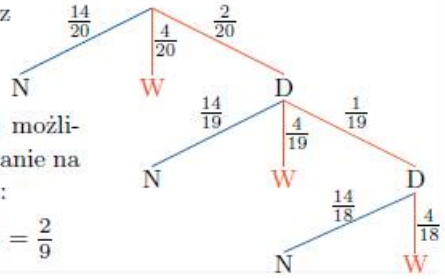
$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

Zatem $p^2 = \frac{1}{9}$ i stąd $p = \frac{1}{3}$ oraz $q = \frac{2}{3}$.



Ćwiczenie 1

Na loterii jest 20 losów, w tym 4 wygrywające (oznaczone literą W) i 2 uprawniające do dalszego losowania (oznaczone literą D). Pozostałe losy są przegrywające (oznaczone literą N). Oblicz prawdopodobieństwo wygranej, jeśli kupimy 1 los.



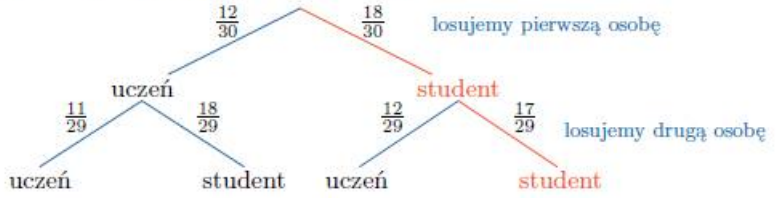
Na drzewie przedstawiamy ilustrację możliwych wyników. Niech A oznacza wygranie na tej loterii, jeśli kupimy 1 los, wówczas:

$$P(A) = \frac{4}{20} + \frac{2}{20} \cdot \frac{4}{19} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

Ćwiczenie 2

Wśród 30 uczestników wycieczki do Szczecina jest 12 uczniów i 18 studentów. Biuro turystyczne postanowiło zwrócić połowę kosztów wycieczki dwóm losowo wybranym osobom. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zwrot połowy kosztów otrzyma przynajmniej jeden uczeń.

Przebieg losowania ilustrujemy za pomocą drzewa.



Niech zdarzenie A oznacza, że wśród wylosowanych dwóch osób jest przynajmniej jeden uczeń. Rozpatrzmy zdarzenie A' – wśród wylosowanych nie ma ani jednego ucznia (na drzewie oznaczone kolorem czerwonym):

$$P(A') = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145}$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{51}{145} = \frac{94}{145} \approx 0{,}65$$

ZADANIA

1. W urnie są 3 kule białe, 4 czarne i 5 zielonych. Losujemy bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych kul:

a) nie będzie kuli czarnej,
b) nie będzie kuli zielonej,
c) będzie kula czarna lub zielona,
d) będzie przynajmniej jedna kula biała.

2. Mamy trzy urny z kulami: w urnie U_1 są 3 kule białe, w urnie U_2 – 3 kule czarne, a w U_3 – 3 białe i 1 czarna. Rzucamy dwa razy monetą: jeśli wypadną dwa orły, to losujemy kulę z urny U_1, jeśli dwie reszki – z urny U_2. W pozostałych przypadkach losujemy kulę z urny U_3. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

3. W pewnej klasie jest 10 chłopców i 20 dziewcząt. Liczba biletów do kina, które będą rozlosowane w tej klasie, jest równa liczbie orłów otrzymanych w rzucie dwiema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że biletu nie otrzyma żaden chłopiec.

4. Przypuśćmy, że razem z innymi dziewięcioma osobami bierzesz udział w losowaniu trzech książek: A, B i C. Na początku losuje się jedną osobę, która ma dostać książkę A. Następnie z pozostałych uczestników losuje się osobę, która ma dostać książkę B, na końcu spośród pozostałych – osobę, która ma dostać książkę C. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) wylosujesz książkę B,
b) nie wylosujesz żadnej książki.

Temat: Schemat Bernoulliego.

Schemat Bernoulliego polega na wielokrotnym powtórzeniu tego samego doświadczenia mającego dwa możliwe wyniki o dodatnich prawdopodobieństwach. Każde powtórzenie doświadczenia nazywamy **próbą** Bernoulliego (lub krótko – próbą), jeden z wyników nazywamy **sukcesem**, drugi – **porażką**. Na przykład, jeśli próba polega na rzucie monetą, za sukces możemy przyjąć wyrzucenie orła, a za porażkę – wyrzucenie reszki. Wymagamy, aby próby były niezależne, to znaczy, by pojawienie się jakiegokolwiek wyniku w dowolnej próbie nie miało wpływu na wyniki w następnych próbach.

Autorem podanego niżej wzoru jest wybitny szwajcarski matematyk Jakob Bernoulli (1654–1705). Jest on uznawany za jednego z twórców rachunku prawdopodobieństwa.

WZÓR BERNOULLIEGO

W schemacie n prób Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów wyraża się wzorem:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, n$$

gdzie p oznacza prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie, a q – prawdopodobieństwo porażki ($q = 1 - p$).

Przykład 1

a) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów w pięciokrotnym rzucie monetą.

Pięciokrotny rzut monetą to schemat Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie (wyrzucenie orła) $p = \frac{1}{2}$, a prawdopodobieństwo porażki $q = \frac{1}{2}$. Zatem prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów:

$$P(S_5 = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$$

b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w 4 rzutach kostką szóstka wypadnie 3 razy.

Czterokrotny rzut kostką to schemat Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo sukcesu (wyrzucenie szóstki) $p = \frac{1}{6}$, a prawdopodobieństwo porażki $q = \frac{5}{6}$. Zatem prawdopodobieństwo otrzymania trzech szóstek:

$$P(S_4 = 3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} = 4 \cdot \frac{5}{6^4} = \frac{5}{324} \approx 0{,}015$$

Przebieg doświadczenia można też zilustrować za pomocą drzewa.

Zadania

4. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dwóch orłów w czterokrotnym rzucie monetą:

a) korzystając ze wzoru Bernoulliego, b) sporządzając drzewo.

a) $P(S_4 = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

b) $P(A) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

5. Rzucamy sześć razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) czterech orłów, b) co najmniej czterech orłów.

5. a) $P(S_6 = 4) = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 15 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{15}{64} \approx 0{,}2344$

b) $P(S_6 \geqslant 4) = P(S_6 = 4) + P(S_6 = 5) + P(S_6 = 6) = \frac{15}{64} + \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32} = 0{,}34375$

6. Rzucamy n razy monetą. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła jest większe od:

a) 0,9, b) 0,99, c) 0,999, d) 0,9999?

6. $P(S_n \geqslant 1) = 1 - P(S_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

a) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0{,}9$
$\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{10}$
$2^n \geqslant 10$, czyli $n \geqslant 4$

b) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0{,}99$
$\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{100}$
$2^n \geqslant 100$, czyli $n \geqslant 7$

c) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0{,}999$
$\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{1000}$
$2^n \geqslant 1000$, czyli $n \geqslant 10$

d) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant 0{,}9999$
$\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{10\,000}$
$2^n \geqslant 10\,000$, czyli $n \geqslant 14$

7. Rzucamy cztery razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) dwóch szóstek, b) co najwyżej dwóch szóstek.

8. Rzucamy pięć razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) trzykrotnie wypadnie 6 oczek,

b) co najmniej dwa razy wypadnie liczba oczek większa od 4.

a) $P(S_5 = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{25}{36} = \frac{125}{3888} \approx 0{,}03215$

b) $P(S_5 \geqslant 2) = 1 - P(S_5 < 2) = 1 - P(S_5 = 0) - P(S_5 = 1) =$
$= 1 - \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 - \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 - \frac{32}{243} - \frac{80}{243} = \frac{131}{243} \approx 0{,}5391$

9. Rzucamy trzy razy dwiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwa razy suma oczek będzie:

a) większa od 10, b) równa 6.

a) $P(S_3 \geqslant 2) = P(S_3 = 2) + P(S_3 = 3) =$
$= \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^1 + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^0 = \frac{33}{1728} + \frac{1}{1728} = \frac{17}{864} \approx 0{,}0197$

b) $P(S_3 \geqslant 2) = P(S_3 = 2) + P(S_3 = 3) =$
$= \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{36}\right)^2 \cdot \left(\frac{31}{36}\right)^1 + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{5}{36}\right)^3 = \frac{2325}{46\,656} + \frac{125}{46\,656} = \frac{2450}{46\,656} = \frac{1225}{23\,328} \approx 0{,}0525$