Temat: Średnia arytmetyczna.

Przykład 1

W tabeli podano, ile punktów zdobyli w sześciu kolejnych meczach dwaj zawodnicy A i B, grający w szkolnej drużynie koszykówki.

A	8	18	10	20	16	12
B	24	18	4	0	0	2

Średnia liczba punktów zdobytych przez zawodnika A:

$$\frac{8+18+10+20+16+12}{6}=14$$

a przez zawodnika B:

$$\frac{24+18+4+0+0+2}{6}=8$$

DEFINICJA

Średnią arytmetyczną liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

Ćwiczenie 1

W tabeli podano oceny z wybranych przedmiotów otrzymane przez troje uczniów klasy III na koniec semestru. Oblicz średnie ocen uzyskanych przez Basię i Tomka (zwróć uwagę, że Tomek nie uczy się języka francuskiego).

	J. polski	J. angielski	J. francuski	Historia	Matematyka	Biologia	Fizyka	Chemia	Geografia	WF	Średnia ocen
Agnieszka	6	5	5	5	4	5	4	3	5	4	4,6
Basia	2	1	2	3	4	3	4	3	2	5	2,9
Tomek	5	4	–	5	3	3	4	4	5	3	4,0

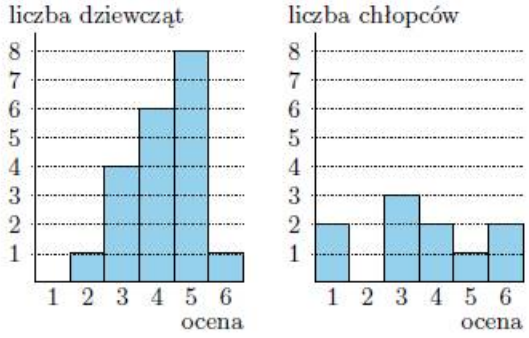
$$\overline{x_A}=\frac{6+5+5+5+4+5+4+3+5+4}{10}=\frac{46}{10}=4{,}6$$

$$\overline{x_B}=\frac{2+1+2+3+4+3+4+3+2+5}{10}=\frac{29}{10}=2{,}9$$

$$\overline{x_T}=\frac{5+4+5+3+3+4+4+5+3}{9}=\frac{36}{9}=4$$

Przykład 2

Na diagramach przedstawiono zestawienia ocen semestralnych z matematyki w klasie III (z podziałem na dziewczęta i chłopców).



Średnia ocen z matematyki w grupie dziewcząt:

$$\overline{x}_d = \frac{1\cdot 2 + 4\cdot 3 + 6\cdot 4 + 8\cdot 5 + 1\cdot 6}{1+4+6+8+1} = \frac{84}{20} = 4{,}2$$

Średnia ocen z matematyki w grupie chłopców:

$$\overline{x}_c = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 2\cdot 4 + 1\cdot 5 + 2\cdot 6}{2+3+2+1+2} = \frac{36}{10} = 3{,}6$$

Średnią ocen z matematyki dla całej klasy możemy obliczyć, korzystając z obliczonych wcześniej średnich:

$$\overline{x}_k = \frac{20\cdot \overline{x}_d + 10\cdot \overline{x}_c}{10+20} = \frac{84+36}{30} = \frac{120}{30} = 4$$

Zwróć uwagę, że $\overline{x}_k$ nie jest równe $\frac{\overline{x}_d + \overline{x}_c}{2}$. Jak sądzisz, dlaczego?

Ćwiczenie 4

a) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_8$ jest równa 16, a średnia arytmetyczna liczb: $x_2, \ldots, x_8$ jest równa 17. Oblicz x_1.

b) Średnia arytmetyczna liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_7$ jest równa 120, a średnia arytmetyczna liczb: x_2, x_4, x_6 jest równa 100. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: x_1, x_3, x_5, x_7.

a) $\frac{x_2+x_3+\ldots+x_8}{7} = 17$, czyli $x_2 + x_3 + \ldots + x_8 = 119$

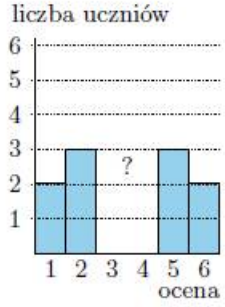
$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_8}{8} = \frac{x_1+119}{8} = 16$, czyli $x_1 = 9$

b) $\frac{x_1+x_3+x_5+x_7}{4} = \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_7)-(x_2+x_4+x_6)}{4} = \frac{120\cdot 7 - 100\cdot 3}{4} = \frac{840-300}{4} = \frac{540}{4} = 135$

ZADANIA

1. Klub zrzeszający dwunastu hodowców gołębi podał, że każdy z jego członków ma średnio 50 gołębi. Dane te okazały się nieaktualne, gdy jeden z klubowiczów sprzedał połowę swoich gołębi – ma ich teraz 36. Ile gołębi przypada średnio na jednego członka klubu obecnie?

2. Liczbę poszczególnych ocen semestralnych z geografii w dwudziestoosobowej klasie przedstawiono na diagramie obok. Jak należy uzupełnić ten diagram, aby średnia ocen z geografii w tej klasie wynosiła:
a) 3,5, b) 3,25, c) 3,65?



Temat: Mediana i dominanta.

Niektóre dane lepiej od średniej arytmetycznej charakteryzuje wartość środkowa – **mediana**. W celu jej wyznaczenia porządkujemy dane od wartości najmniejszej do największej, na przykład:

1, 2, 2, 2, 5, 5, 6 – medianą jest liczba 2,

−3, 0, 0, 2, 7, 9, 11, 13, 17 – medianą jest liczba 7.

Medianą nieparzystej liczby danych jest wartość środkowa. W przypadku parzystej liczby danych medianą jest średnia arytmetyczna dwóch sąsiednich wartości środkowych, na przykład:

1, 2, 3, 8, 9, 14 – mediana jest równa $\frac{3+8}{2} = 5{,}5$.

Zauważ, że mediana dzieli dane na dwie równoliczne grupy. Dane w jednej grupie są od niej mniejsze lub równe, dane w drugiej – większe lub równe.

Ćwiczenie 1

Wyznacz medianę danych liczb.

a) 1, 2, 3, 100, 1000

b) 6, 7, 8, 105, 1005

c) 7, 7, 8, 11, 20, 7

d) 20, 8, 7, 11, 7, 7

a) 1, 2, 3, 100, 1000 $m_e = 3$

b) 6, 7, 8, 105, 1005 $m_e = 8$

c) 7, 7, 8, 11, 20, 7 najpierw trzeba uporządkować dane 7, 7, 7, 8, 11, 20

$m_e = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$

Kolejną wielkością przydatną podczas analizy danych jest **dominanta** – wartość, która występuje wśród danych najczęściej (dominanta bywa również nazywana wartością modalną lub modą).

Na przykład dla liczb: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6 dominantą jest liczba 2.

Jeśli w zestawie danych kilka liczb występuje z tą samą, najwyższą częstością, to przyjmujemy, że każda z tych liczb jest dominantą. Jeżeli natomiast wszystkie liczby występują tak samo często, to przyjmujemy, że nie ma dominanty.

Ćwiczenie 5

Sprzedawca zanotował rozmiary butów męskich, które sprzedał pewnego dnia: 42, 44, 41, 42, 43, 42, 44, 42, 45, 43, 45, 46. Wyznacz medianę i dominantę tych danych. Który rozmiar butów sprzedawał się najlepiej?



Uporządkujmy dane:

41, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 44, 44, 45, 45, 46

$m = \frac{43+43}{2} = \frac{86}{2} = 43$

$d = 42$

Najlepiej sprzedawał się rozmiar 42.

Ćwiczenie 6

Nauczyciel biologii zrobił zestawienie wyników trzech sprawdzianów przeprowadzonych w dwudziestoosobowej klasie (tabela obok). Po kolejnym sprawdzianie dopisał do niego nowe oceny. Wyznacz dominantę i medianę ocen w nowym zestawieniu, jeśli z tego sprawdzianu:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	4	10	23	2	19	2

a) wszyscy uczniowie otrzymali ocenę dobrą,

b) połowa uczniów otrzymała ocenę bardzo dobrą, a pozostali – niedostateczną?

a)

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	4	10	23	22	19	2

$m = 4$

$d = 3$

b)

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	14	10	23	2	29	2

$m = 3$

$d = 5$

ZADANIA

1. W tabeli przedstawiono, ile medali zdobyli Polacy w trakcie letnich Igrzysk Olimpijskich w latach 1992–2012.

Oblicz średnią i medianę zdobytych:

a) złotych medali w tych latach,

b) wszystkich medali w tych latach.

Rok	złoto	srebro	brąz
1992	3	6	10
1996	7	5	5
2000	6	5	3
2004	3	2	5
2008	3	6	1
2012	2	2	6

2. Oznaczmy przez: $\overline{x}$, M i D odpowiednio: średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu liczb: 1, 2, 3, 4, c, 2, 3, 4, 4, 4. Oblicz c, jeśli:

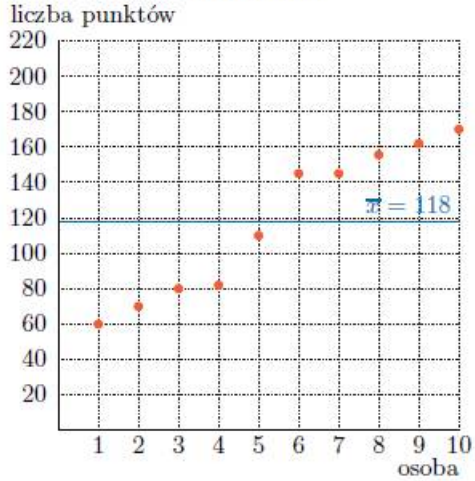
a) $\overline{x} = D$, b) $\overline{x} = M$.

Temat: Odchylenie standardowe.

Przykład 1

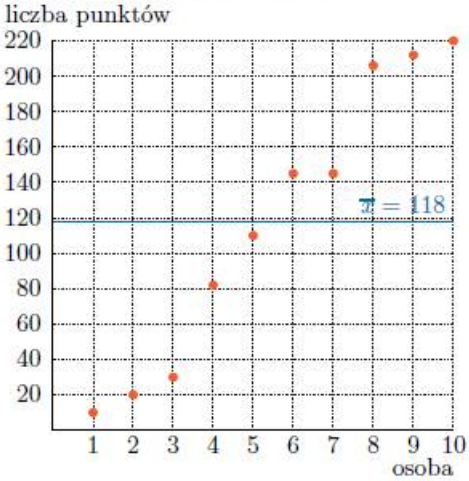
W dwóch dziesięcioosobowych grupach studentów przeprowadzono ten sam egzamin oceniany w skali 0–220 punktów. Wyniki otrzymane w grupach A i B przedstawiono na diagramach.

GRUPA A



Wyniki w grupie A: 60, 70, 80, 82, 110, 145, 145, 156, 162, 170

GRUPA B



Wyniki w grupie B: 10, 20, 30, 82, 110, 145, 145, 206, 212, 220

Dla obydwu zestawów danych średnia arytmetyczna jest równa 118, mediana – 127,5, a dominanta – 145. Jednak rozproszenie wyników w grupie B jest znacznie większe niż w grupie A. Jako miarę rozproszenia danych wokół ich średniej przyjmuje się **odchylenie standardowe**.

DEFINICJA

Wariancją liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę:

$$\frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n}$$

gdzie $\overline{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Odchyleniem standardowym liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy liczbę σ określoną za pomocą wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

Uwaga. Wariancja jest równa σ^2 i jest w ten sposób oznaczana.

Przykład 2

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe danych: 4, 9, 11, 13, 13.

Obliczamy średnią i wariancję:

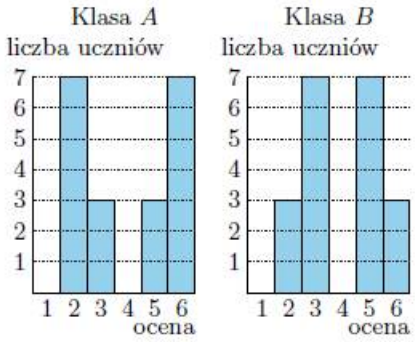
$$\overline{x} = \frac{4+9+11+13+13}{5} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{(4-10)^2+(9-10)^2+(11-10)^2+(13-10)^2+(13-10)^2}{5} = \frac{56}{5} = 11{,}2$$

Stąd odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{11{,}2} \approx 3{,}35$.

Przykład 3

Na diagramach przedstawiono oceny semestralne z muzyki w dwóch dwudziestoosobowych klasach. Średnia ocen w obu klasach jest równa 4. Pokaż, że odchylenie standardowe ocen jest większe w klasie A.



Obliczając wariancję w klasie A, wykorzystujemy pogrupowanie danych:

$$\sigma_A^2 = \frac{7\cdot(2-4)^2+3\cdot(3-4)^2+3\cdot(5-4)^2+7\cdot(6-4)^2}{20} = \frac{62}{20} = 3{,}1$$

Odchylenie standardowe $\sigma_A = \sqrt{3{,}1} \approx 1{,}76$.

Obliczamy wariancję w klasie B:

$$\sigma_B^2 = \frac{3\cdot(2-4)^2+7\cdot(3-4)^2+7\cdot(5-4)^2+3\cdot(6-4)^2}{20} = \frac{38}{20} = 1{,}9$$

Odchylenie standardowe $\sigma_B = \sqrt{1{,}9} \approx 1{,}38$. Zatem $\sigma_A > \sigma_B$.

TWIERDZENIE

Wariancja liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, których średnia arytmetyczna jest równa $\overline{x}$, wyraża się za pomocą wzoru:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - (\overline{x})^2$$

ZADANIA

1. Oblicz średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe danych:

a) 4, 4, 4, 6, 6, 6;

b) 3, 4, 5, 5, 6, 7;

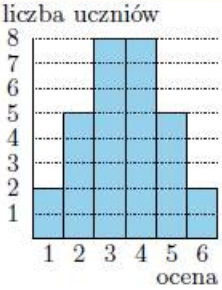
c) 4, 5, 9, 9, 9, 9, 9, 10;

d) 2, 2, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9.



2. Przed rozpoczęciem zawodów sumo zważono sześciu zawodników i otrzymano następujące wyniki (w kilogramach): 170, 190, 160, 170, 180, 150. Oblicz średnią arytmetyczną, wariancję i odchylenie standardowe otrzymanych danych.

3. Na diagramie przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z fizyki w klasie IIIc.



a) Oblicz odchylenie standardowe tych ocen.

b) Ilu uczniów otrzymało ocenę różniącą się od średniej ocen o mniej niż odchylenie standardowe?

c) Ilu uczniów otrzymało ocenę mieszczącą się w przedziale $(\overline{x} - 2\sigma; \overline{x} + 2\sigma)$?

Temat: Średnia ważona.

Przykład 1

Podczas egzaminu z języka obcego wypowiedź studenta oceniano w dwóch kategoriach: x_1 – ocena za umiejętność komunikacji, x_2 – ocena za poprawność gramatyczną. Ostateczną ocenę z egzaminu ustalano, korzystając ze wzoru:

$$\frac{3x_1 + x_2}{3+1}$$

W ten sposób zwiększono znaczenie (wagę) oceny za umiejętność komunikacji w stosunku do oceny za poprawność gramatyczną. W tabeli podano oceny, które otrzymali Marek i Tomek.

	x_1	x_2	$\frac{3x_1+x_2}{4}$	Ocena z egzaminu
Marek	6	2	$\frac{3\cdot 6+2}{4}=\frac{20}{4}$	5,0
Tomek	3	5	$\frac{3\cdot 3+5}{4}=\frac{14}{4}$	3,5

W powyższym przykładzie obliczyliśmy **średnią ważoną**.

DEFINICJA

Średnią ważoną liczb: $x_1, x_2, \ldots, x_k$ z odpowiadającymi im wagami: $n_1, n_2, \ldots, n_k$, będącymi liczbami dodatnimi, określamy wzorem:

$$\overline{x}_w = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

Przykład 2

Oblicz średnią arytmetyczną liczb: 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 7, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9.

Liczba: x_i	2	7	9
Waga: n_i (liczba wystąpień)	12	5	3

Dane z tabeli podstawiamy do wzoru:

$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3}{n_1 + n_2 + n_3} = \frac{12\cdot 2 + 5\cdot 7 + 3\cdot 9}{20} = \frac{86}{20} = 4{,}3$$

Zauważ, że tak obliczona średnia ważona wyjściowego zestawu danych jest ich średnią arytmetyczną.

ZADANIA

1. Oblicz średnią ważoną liczb z podanymi wagami.

a)

Liczba	11	12	13
Waga	0,1	0,3	0,6

b)

Liczba	3	5	8	11
Waga	0,8	0,1	0,4	0,3

2. W teleturnieju, aby móc wygrać wycieczkę do Torunia, trzeba wziąć udział w czterech konkurencjach ocenianych w skali od 0 do 10 punktów. W tabeli podano, ile punktów zdobył każdy z trzech zawodników, którzy przeszli do finału. Ostateczny wynik jest średnią ważoną. Który zawodnik wygrał teleturniej?

	I waga 0,2	II waga 0,8	III waga 0,4	IV waga 0,6
Adam	10	5	8	7
Marek	5	8	6	7
Piotr	9	4	10	8



Temat: Potęga o wykładniku wymiernym.

DEFINICJA

Dla dowolnej liczby $a > 0$ i liczby naturalnej $n > 1$ przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Przykład 1

Oblicz.

a) $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$ b) $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$ c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

DEFINICJA

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Przykład 2

Oblicz.

a) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ b) $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

Dla $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbf{W}$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Ćwiczenie 2

Oblicz.

a) $8^{\frac{4}{3}}$ c) $81^{1,5}$ e) $125^{-\frac{2}{3}}$ g) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2,5}$

b) $32^{\frac{2}{5}}$ d) $4^{-\frac{3}{2}}$ f) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$ h) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

a) $8^{\frac{4}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{4}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{4}{3}} = 2^4 = 16$

b) $32^{\frac{2}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{2}{5}} = 2^2 = 4$

c) $81^{1,5} = \left(9^2\right)^{1,5} = 9^3 = 243$

d) $4^{-\frac{3}{2}} = \left(2^2\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

e) $125^{-\frac{2}{3}} = \left(5^3\right)^{-\frac{2}{3}} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$

f) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(3^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$

g) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2,5} = \left(2^{-2}\right)^{-2,5} = 2^5$

h) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

ZADANIA

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 7.

a) $\sqrt[5]{7}$ b) $\sqrt[3]{7^2}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$ e) $7 \cdot \sqrt[5]{7}$

2. Zapisz liczbę w postaci a^x, gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{W}$.

a) $\sqrt[4]{5^{\frac{1}{2}}}$ b) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{3}$ c) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} : 8^{\frac{2}{3}}$ d) $3^{\frac{1}{3}} \cdot 12^{\frac{3}{4}} : \sqrt{8}$

3. Oblicz.

a) $9^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{-\frac{4}{3}}$ e) $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$ g) $10\,000^{0,25}$

b) $125^{\frac{2}{3}}$ d) $27^{-\frac{2}{3}}$ f) $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$ h) $81^{-0,125}$

4. Oblicz.

a) $0,04^{\frac{3}{2}}$ c) $0,027^{\frac{2}{3}}$ e) $0,0625^{-\frac{5}{4}}$ g) $0,008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$

b) $0,16^{-\frac{1}{2}}$ d) $0,0016^{-\frac{3}{4}}$ f) $0,00032^{\frac{3}{5}}$ h) $0,0256^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{10}\right)^9$

Temat: Potęga o wykładniku rzeczywistym.

Potrafimy określić wartość liczbową potęgi a^x, gdy wykładnik x jest liczbą naturalną, całkowitą lub wymierną, na przykład dla $a = 3$:

$3^2 = 9$ $\quad 3^{-4} = \frac{1}{81}$ $\quad 3^0 = 1$ $\quad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $\quad 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Pokażemy na przykładach, jak można określić wartość liczbową potęgi a^x, gdy x jest liczbą niewymierną (w celu sformułowania ścisłej definicji wykorzystuje się pojęcie granicy ciągu).

Przykład 1

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $3^{\sqrt{2}}$.

$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$, zatem rozpatrujemy kolejno:

$3^{1,4}$	$\approx 4{,}655536722$
$3^{1,41}$	$\approx 4{,}706965002$
$3^{1,414}$	$\approx 4{,}727695035$
$\vdots$	$\vdots$
$3^{1,414213562}$	$\approx 4{,}728804386$

Podane w tabeli przybliżenia możemy obliczyć, korzystając z kalkulatora lub komputera.

Podstawiając w wykładniku coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $\sqrt{2}$, otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $3^{\sqrt{2}}$.

Zauważmy, że gdy wykładnik x „zbliża się" do $\sqrt{2}$, to 3^x „zbliża się" do pewnej liczby rzeczywistej, którą oznaczamy $3^{\sqrt{2}}$.

Korzystając z kalkulatora, możemy obliczyć wartość $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}72880438784$.

Przykład 2

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby $5^{\sqrt{2}}$.

$5^{1,4}$	$\approx 9{,}518269694$
$5^{1,4142}$	$\approx 9{,}738305174$
$5^{1,414213562}$	$\approx 9{,}738517736$
$\vdots$	$\vdots$
$5^{\sqrt{2}}$	$\approx 9{,}738517742$

Podstawiając w wykładniku coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $\sqrt{2}$, otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby $5^{\sqrt{2}}$.

Przykład 3

Podaj kilka przybliżeń dziesiętnych liczby 2^{π}.

$2^{3,14}$	$\approx 8{,}815240927$
$2^{3,14159}$	$\approx 8{,}824961595$
$2^{3,14159265}$	$\approx 8{,}824977805$
$\vdots$	$\vdots$
2^{π}	$\approx 8{,}824977827$

Podstawiając w wykładniku coraz dokładniejsze przybliżenie liczby π, otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenie liczby 2^{π}.

$\pi = 3{,}14159265\ldots$

TWIERDZENIE

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}_+$ i dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ prawdziwe są wzory:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ c) $\left(5^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}$ e) $7^{\sqrt{2}} \cdot 49^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ g) $\frac{2^{\sqrt{3}+6}}{2^{\sqrt{3}+1}}$

b) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}}$ d) $\left(2^{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ f) $9^{\sqrt{5}} \cdot 3^{1-2\sqrt{5}}$ h) $\frac{6^{\sqrt{3}+1} \cdot 2^{-\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}}}$

a) $\left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 5^3 = 125$

b) $\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{2\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = 3^4 = 81$

c) $\left(5^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1} = 5^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 5^{3-1} = 5^2 = 25$

d) $\left(2^{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = 2^{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})} = 2^{7-2} = 2^5 = 32$

e) $7^{\sqrt{2}} \cdot 49^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 7^{\sqrt{2}} \cdot \left(7^2\right)^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 7^{\sqrt{2}} \cdot 7^{-\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 7^0 = 1$

ZADANIA

1. Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

a) $3^4 \cdot 3^{1-\sqrt{2}}$ c) $\left(3^{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ e) $6^{\sqrt{7}} : 2^{\sqrt{7}}$

b) $3^3 : 3^{2-\sqrt{2}}$ d) $\left(3^{\sqrt{3}}\right)^{1-\sqrt{3}}$ f) $\left(\sqrt{3}\right)^{\pi} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{\pi}$

2. Oblicz.

a) $6^{1-\sqrt{2}} \cdot 6^{\sqrt{2}+1}$ c) $2^{3\sqrt{5}+5} \cdot 8^{-\sqrt{5}}$ e) $6^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{2-\sqrt{3}}$

b) $5^{\pi+3} : 5^{\pi}$ d) $4^{\sqrt{3}+2} : 2^{2\sqrt{3}}$ f) $2^{2\pi+6} \cdot 9^{0,5\pi} : 12^{\pi}$

3. Przedstaw liczbę w postaci a^x, gdzie a jest liczbą naturalną.

a) $2^{\sqrt{7}-2} \cdot 4^3$ c) $9^{\frac{\sqrt{8}}{2}} \cdot 27^{-1}$ e) $\frac{1}{3} \cdot 9^{\pi+\frac{1}{2}} : 81^{2\pi}$

b) $2^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$ d) $27 \cdot \left(3^{-\sqrt{3}}\right)^2$ f) $7^{-2\sqrt{2}} : 49^{\pi+\sqrt{2}}$

4. Sprawdź, czy liczba q należy do przedziału $(3; 6)$. Nie korzystaj z kalkulatora, tylko z podanych przybliżeń.

a) $q = 4^{\sqrt{3}-1} : \frac{1}{4}$ c) $q = 6^{\sqrt{3}} : \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

b) $q = 0{,}5^{\sqrt{3}+1} \cdot 6^{\sqrt{3}}$ d) $q = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}32199709$
$3^{\sqrt{3}} \approx 6{,}70499185$
$6^{\sqrt{3}} \approx 22{,}2739634$